Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences et Techniques
Tanger

Année 2010-2011
Module M111
MIPC

Série n° 6

Exercice 1.

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Exercice 3.

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

Exercice 4.

Montrer que le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$ est nul. En déduire que tout déterminant antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 5.

Montrer que le déterminant $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ est dévisible par $(x-1)^3$.

Exercice 6.

Quels sont les racines du polynôme $P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & x & 3 & 4 \\ 2 & 3 & x & 4 \\ 2 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$.

– – – – – – –



Correction de la série $n°6$.

Exercice 1.

$$a)\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_2 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} \text{ (développement du déterminant suivant la première colonne)}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

$$b)\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -39 & -38 & -82 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 7L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - 31L_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -39 & -38 & -82 \end{vmatrix} \text{ (développement du déterminant suivant la première colonne)}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} (L_3 \longleftarrow L_3 - 39L_2)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

$$c)\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \\ 0 & -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - 12L_1 \end{pmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} -3 & -4 & -6 \\ -4 & -8 & -11 \\ -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} \text{ (développement du déterminant suivant la première colonne)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -11 \\ -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} (L_1 \longleftarrow L_1 - L_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 9L_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

Exercice 2.

a) Montrons par réccurence sur n que : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

On a : $\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$; supposons que $\Delta_n = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$, alors, en dévellopant suivant la ligne $n+1$,

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1n+1} \end{vmatrix} = a_{n+1n+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}a_{n+1n+1}.$$

En déduit de ce qui précède que : $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$

b) $D_2 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 4+x & 1+x & 1 & 1 \\ 4+x & 1 & 1+x & 1 \\ 4+x & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} (C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$$

$$= (4+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= (4+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{pmatrix}$$



$= (4+x)x^3.$

c) $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} =$
$(a+b+c)\begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix} = -(a+b+c)((c-b)^2+(a-b)(a-c)).$

Exercice 3.

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{pmatrix}$$

$= a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$ (développement du déterminant suivant la première colonne)

$$= a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix}$$

$$= a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

Exercice 4.

Montrons que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul. Rappellons qu'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est dite **matrice antisymétrique** si et seulement si :

$$^tA = -A.$$

c'est-à-dire pour tout $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ $a_{ij} = -a_{ji}$, en particulier, pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $a_{ii} = 0$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice antisymétrique, alors

$$\det(A) = \det(^tA) = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots\cdots & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n-1} & \cdots & a_{n-2,n-1} & 0 & a_{n,n-1} \\ a_{1n} & \cdots & \cdots\cdots & a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} =$$



$$= \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots\cdots & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1} & \cdots & -a_{n-,n-2} & 0 & -a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & \cdots & \cdots\cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots\cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-,n-2} & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{1n} & \cdots & \cdots\cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \det(A);$$

si n est impair, $\det(A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$; d'où $\det(A) = 0$.

Exercice 5.

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1-x & 1-x^2 & 1-x^3 \\ 0 & 2-x & 3-x^2 & 4-x^3 \\ 0 & 4-x & 9-x^2 & 16-x^3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 1-x^2 & 1-x^3 \\ 2-x & 3-x^2 & 4-x^3 \\ 4-x & 9-x^2 & 16-x^3 \end{vmatrix} \text{(développement suivant la première colonne)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 1-x^2 & 1-x^3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1+x+x^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -1+x & -2+x+x^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \longleftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \longleftarrow C_3 - 3C_1 \end{pmatrix}$$

$$= -(1-x) \begin{vmatrix} -1+x & -2+x+x^2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(1-x)(6(x-1) - 2(-2+x+x^2)) = -(1-x)(-2x^2+4x-2) = -2(x-1)^3.$$

Exercice 6.

Quels sont les racines du polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & x & 3 & 4 \\ 2 & 3 & x & 4 \\ 2 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} x+9 & 2 & 3 & 4 \\ x+9 & x & 3 & 4 \\ x+9 & 3 & x & 4 \\ x+9 & 3 & 4 & x \end{vmatrix} (C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$$

$$= (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 1 & 3 & x & 4 \\ 1 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2+x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x+9) \begin{vmatrix} -2+x & 0 & 0 \\ 1 & x-3 & 0 \\ 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = (x+9)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Les racines de $P(x)$ sont : -9, 2, 3, 4. .

– – – – – – –


ETUSUP.com